5M

УДК 514.116

Л.П. Мироненко, И.В. Петренко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83000, г. Донецк, ул. Артема, 58, *mironenko.leon@yandex.ru*

Вывод первого и второго стандартных пределов из единой системы неравенств

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko
Donetsk National Technical University, Ukraine
Ukraine, 83000, Donetsk, Artema st., 58

An Obtaining of the First and Second Standard Limits Through a System of Inequalities

Л.П. Мироненко, І.В.Петренко
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83000, м. Донецьк, вул. Артема, 58

Отримання першої і другої стандартних границь з єдиної системи нерівностей

Целью статьи является универсальный подход к стандартным пределам в теории пределов. Подход основан на использовании цепочки неравенств $x \le tgx \le e^x - 1 \le xe^x$ при малых x и предельном переходе в них. Кроме стандартных пределов, в рамках теории, получены все следствия из них. Предложенный подход проще общепринятого.
Ключевые слова: предел, стандартные пределы, неравенство, функция, синус, экспонента.

The purpose of the paper is an universal approach for obtaining the standard limits in the elementary theory of limits. The approach uses the chain of inequalities $x \le tgx \le e^x - 1 \le xe^x$ for the small x and the limit transition in them. The method can be applied to both standard limits simultaneously, that makes the theory more universal. Besides, the theory gives some new representations of the standard limits.
Keywords: limit, standard limits, function, sine, exponential, method, inequalities.

Метою статті є універсальний підхід обчислювання стандартних границь в теорії границь. Підхід заснован на застосуванні нерівностей $x \le tgx \le e^x - 1 \le xe^x$ та граничному переході в них. Підхід може бути застосованим до обох границь одночасно, що значно спрощує отримання результатів. Крім визначення стандартних границь, отримано всі наслідки з них у рамках запропонованої теорії. На нашу думку, цей підхід більш привабливий, ніж звичайний.
Ключові слова: границя, стандартні границі, функція, синус, експонента, нерівність.

Введение

Стандартные пределы в математическом анализе, которые также известны под названиями первого и второго замечательных пределов, используются, в основном, для вывода производных элементарных функций $\sin x, \cos x, e^x, a^x$, составляющих основу стандартной таблицы производных [1], [2]. Стандартные пределы представляют также самостоятельный интерес. С их помощью вычисляют целый класс пределов и используют практически во всех разделах математики.

Обычно вывод каждого из стандартных пределов осуществляется различным путем. Первый стандартный предел основан на предельном переходе в геометрических построениях на тригонометрическом круге, а второй – на основе бинома Ньютона и теоремах о предельном переходе в неравенствах. Эти методы доказательства эффективны, наглядны, но не носят универсального характера [1], [2].

Существуют универсальные методы доказательства, которые связывают пределы одной теорией. Так, первый и второй стандартные пределы можно связать с помощью формулы Эйлера [3].

Еще один эффективный метод доказательства основан на методе неопределенных коэффициентов, который позволяет найти пределы с помощью стандартных разложений функций $\sin x$ и e^x [4].

Нами предложен единый и достаточно простой подход к стандартным пределам, и этот подход основан на предельном переходе в неравенствах. Главное отличие от классического подхода является то, что для вывода первого стандартного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

и второго стандартного предела, рассматриваемого в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \qquad (2)$$

используется одна общая система неравенств (3), которые доказаны и даны в приложениях. Такой подход является универсальным для обоих пределов (1) и (2), и приводит к цели мгновенно.

1 Первый и второй стандартные пределы

Процедура вывода пределов (1) и (2) состоит в следующем. Записываем неравенства

$$x\le tgx\le e^x-1\le xe^x,\ \ x\ge 0. \qquad (3)$$

После деления неравенств (3) на $x>0$ и умножения их на $\cos x>0$ выполняется предельный переход при $x\to +0$:

$$\lim_{x\to +0}\cos x\le \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\le \lim_{x\to +0}\frac{e^x-1}{x}\lim_{x\to +0}\cos x\le \lim_{x\to +0}e^x\cos x.$$

К этим неравенствам применим известную теорему в теории пределов для функций, удовлетворяющих неравенствам $g(x)\le f(x)\le \varphi(x)$ в некоторой окрестности точки x_o, и имеющих одинаковые значения пределов $\lim_{x\to x_o}g(x)=\lim_{x\to x_o}\varphi(x)=a$. При выполнении этих условий существует предел $\lim_{x\to x_o}f(x)$ и он равен a.

Поскольку $\lim_{x\to +0}e^x\cos x=\lim_{x\to +0}\cos x=1$, то налицо выполнение условий теоремы, поэтому существуют пределы $\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Обычно эти пределы записывают отдельно в виде (1) и (2) и называют соответственно первым и вторым стандартными пределами.

Замечание 1. Чтобы не доказывать лишнее неравенство $tgx \le e^x - 1$, можно провести доказательство отдельно для каждого предела, записав систему неравенств (3) в виде двух двойных неравенств:

$$\begin{aligned} &x \le tgx \le xe^x, \\ &x \le e^x - 1 \le xe^x, \ \ x \ge 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Как видно из этих неравенств, достаточно провести предельный переход только для одного из них, а второй предел получается автоматически, и не требует каких-либо пояснений. Кроме того, очевидно, что доказательство неравенств $x \le e^x - 1 \le xe^x$ проще доказательства неравенства $tgx \le e^x - 1$.

На рис. 1 приведены функции неравенств (3). На первом из них демонстрируются графически неравенства (3) при малых положительных значениях x, а на втором рисунке показано, что неравенство (3) нарушается, начиная с некоторого значения $x_o > 0$. График функции tgx пересекает кривые $y = e^x - 1$ и $y = xe^x$.

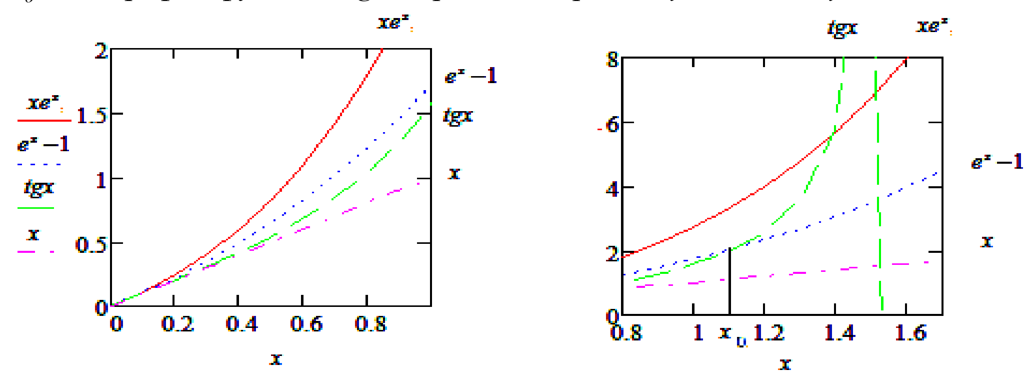


Рисунок 1 – К демонстрации неравенств $x \le tgx \le e^x - 1 \le xe^x, \ \ x \ge 0$

Геометрический смысл доказательства состоит в том, что графики функций $y = tgx$ и $y = e^x - 1$ при малых значениях x заключены между графиками функций $y = x$ и $y = xe^x$, каждая из которых стремится к одному и тому же числовому значению (в данном случае к нулю).

Замечание 2. Доказательства неравенств (3) методами элементарной математики приведено в приложениях 1 – 3, а с использованием производной эти неравенства очевидны. В самом деле, вычисляя производные от каждой части неравенства (3), получим практически очевидные неравенства

$$1 \le \frac{1}{\cos^2 x} \le e^x \le (x+1)e^x, \ \ x \ge 0.$$

2 Обоснование предельного перехода в неравенствах (3) при $x < 0$

Для второго стандартного предела (2) проблемы вычисления левостороннего предела $\lim\limits_{x \to -0} \frac{e^x - 1}{x}$ нет. Из первого рисунка (рис. 2) видно, что при $x < 0$ функция $e^x - 1$ находится между функциями xe^x и x. Это означает, что вышеупомянутая теорема применима и для отрицательных значений x. Поэтому $\lim\limits_{x \to -0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Для первого стандартного предела (1) в неравенстве (4) проблема левостороннего предела $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x}{x}$ существует. Из первого рисунка (рис. 2) видно, что функция tgx ограничена только функцией x, поэтому выполняется только неравенство $tgx \le x$ при $x < 0$. Проблема легко решается, если в первом неравенстве (4) заменить в экспоненте x на модуль $|x|$. Как видно из второго рисунках, теперь функция tgx находится между функциями $xe^{|x|}$ и x как при положительных, так и при отрицательных x.

Практически это означает, что в формулах (4) следует сделать небольшое изменение и система будет справедлива для произвольных по знаку x

$$\begin{aligned} x \le tgx \le xe^{|x|}, \\ x \le e^x - 1 \le xe^x. \end{aligned} \qquad (5)$$

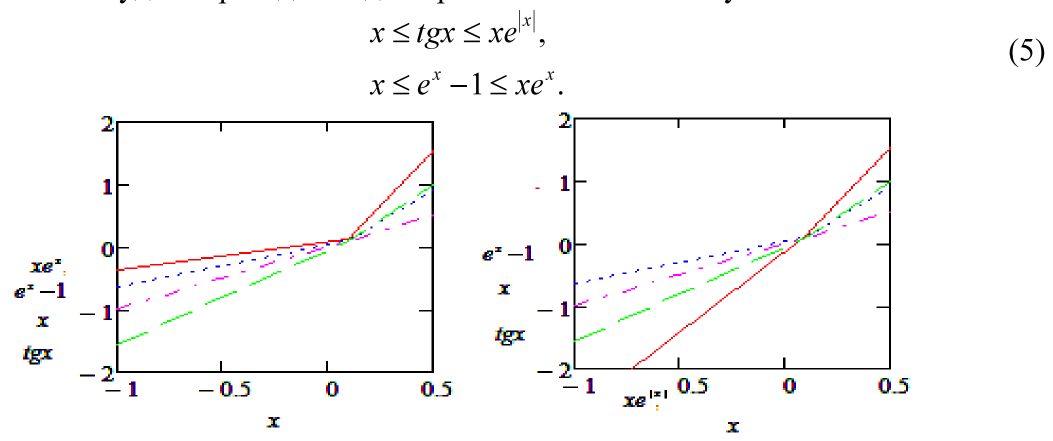


Рисунок 2 – К демонстрации неравенств (3) и (5) при $x < 0$.

Замечание 3. Для вывода стандартных пределов корректнее пользоваться неравенствами (5) (а не (3) или (4)), к которым применима теорема «о двух милиционерах» как со стороны положительных, так и со стороны отрицательных x.

3 Следствия из стандартных пределов

Следствия из стандартных пределов получаются непосредственно из формул (1) и (2) надлежащей заменой непрерывной переменной под знаком предела [5], [6].

Нас интересуют возможности нашей теории, поэтому рассмотрим задачу получить известные следствия пределов (1), (2) непосредственно из неравенств (5). Для простоты рассмотрим только случай $x \ge 0$, хотя результаты справедливы для произвольных по знаку x.

Хорошо известные следствия из первого стандартного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = 1. \qquad (6)$$

следуют из первого двойного неравенства $x \le tgx \le xe^{|x|}$ системы (5) надлежащими преобразованиями и заменами переменной. Так, первая формула (6) получается сразу после деления на $x \ne 0$ и предельного перехода при $x \to 0$. Вторая и третья формулы – с помощью замен $x = \arcsin y$, $x = arctgy$ и предельного перехода при $y \to 0$.

Рассмотрим следствия из второго стандартного предела – второе двойное неравенство (5) $x \le e^x - 1 \le xe^x \Rightarrow 1 + x \le e^x \le 1 + xe^x \Rightarrow \ln(1+x) \le x \le \ln(1+xe^x)$. Рассмотрим левую часть неравенства $\ln(1+x) \le x$. Разделим его на $x > 0$ и перейдем к пределу, получим $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} \le 1$. Теперь рассмотрим правую часть неравенства $x \le \ln(1+xe^x)$.

Разделим его на $xe^x > 0$, получим $e^{-x} \le \frac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}$. Перейдем к пределу, заменив $xe^x = y$, получим $\lim_{y\to+0}\frac{\ln(1+y)}{y} \ge 1$. Сравнивая оба предела, получим хорошо известный предел, который является одним из следствий второго стандартного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (7)$$

Обобщим неравенства $x \le e^x - 1 \le xe^x$, выполнив замену переменной с параметром $x = \ln a \cdot t$, после чего вернемся к старому обозначению x (вместо t), получим

$$\ln a \cdot x \le a^x - 1 \le x\ln a \cdot a^x. \qquad (8)$$

После деления неравенства (8) на $x > 0$ и перехода к пределу, получим хорошо известный предел $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Обратим неравенство (8), получим: $\log_a(1+\ln a \cdot x) \le x \le \log_a(1+x\ln a \cdot a^x)$ и рассмотрим его как два отдельных неравенства. Другими словами, повторим действия как при получении предела (7):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\ln a \cdot x\right)}{x} = 1. \qquad (9)$$

Формула (9) обычно не рассматривается в курсе математического анализа, тем не менее, из нашей теории она следует естественным путем. Это означает, что метод способен получать новые результаты, подобные формуле (9).

Прологарифмируем неравенство (5), записанное в виде $1+x \le e^x \le 1+xe^x$, по основанию a:

$$\log_a(1+x) \le x\log_a e \le \log_a(1+xe^x),$$

получим еще одно известное следствие

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Перепишем неравенства $\ln(1+x) \le x \le \ln(1+xe^x)$ в виде $\frac{1}{x}\ln(1+x) \le 1 \le \frac{1}{x}\ln(1+xe^x)$, точнее $\ln(1+x)^{1/x} \le 1 \le \ln(1+xe^x)^{1/x}$. Потенцируем их и получим

$$(1+x)^{1/x} \le e \le (1+xe^x)^{1/x}. \qquad (10)$$

После перехода к пределу, как это делалось в случае с $\lim_{x\to 0}(\ln(1+x))/x$, получим предел, который обычно рассматривается в теории пределов как базовый предел второго стандартного предела

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Неравенства (10) не изменятся, если в них сделать замену переменной $y = 1/x$ и устремить $y \to \infty$. В результате получим «официальную» форму второго стандартного предела $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$.

Один из новых результатов мы получим, если применим следующие рассуждения к неравенствам (8)

$$\log_a(1+\ln a\cdot x)\le x\le \log_a\left(1+\ln a\cdot xa^x\right)\Rightarrow \log_a(1+\ln a\cdot x)^{1/x}\le 1\le \log_a\left(1+\ln a\cdot xa^x\right)^{1/x}.$$

Отсюда следует неравенство, обобщающее неравенства (10)

$$(1+\ln a\cdot x)^{1/x}\le a\le \left(1+\ln a\cdot xa^x\right)^{1/x} \qquad (11)$$

и предел, который обобщает второй стандартный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+\ln a\cdot x)^{1/x}=a \text{ и } \lim_{x\to\infty}(1+\ln a/x)^x=a. \qquad (12)$$

Формулы (12) обычно не рассматривается в курсе математического анализа. Это не удивительно, потому, что эти формулы не следуют из классических методов доказательства второго стандартного предела. Наша теория создает подобные формы естественным путем и эти формулы совпадают с классическими при $a=e$. Подчеркнем, что формулы (12) обобщают общепринятые выражения для второго стандартного предела $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ и $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$.

Приложение 1. Доказательство неравенства $x\le tgx\le xe^x$, $x>0$.

Первое неравенство $x\le tgx$ очевидно и следует из геометрических построений (рис. 3) [1]. Для доказательства второго неравенства $tgx\le xe^x$, возведем в квадрат обе части неравенства и преобразуем

$$tg^2x\le x^2e^{2x}\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\le x^2e^{2x}\Rightarrow \sin^2 x(1+\sin^2 x+\sin^4 x+...)\le x^2e^{2x}.$$

В правой части отбросим член $e^{2x}\ge 1$, а в левой старшие степени геометрической прогрессии (всегда найдется такое значение x при $x\to 0$), получим очевидное неравенство $\sin^2 x\le x^2$ (рис. 3).

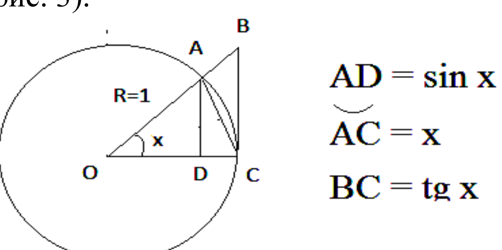


Рисунок 3 – К доказательству неравенства $tgx\ge x\ge \sin x$

Приложение 2. Доказательство неравенства $e^x-1\le xe^x$, $x>0$.

Преобразуем неравенство, приведя его к сравнению с геометрической прогрессией: $e^x-1\le xe^x\Rightarrow e^x\le \dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+...$

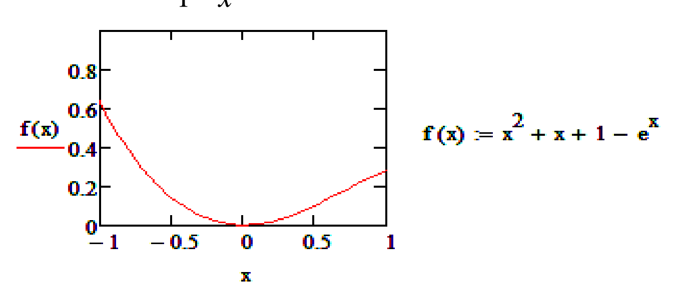


Рисунок 4 – К доказательству неравенства $e^x-1\le xe^x$, $x>0$.

Из рисунка очевидно, что $x^2+x+1-e^x \geq 0$. Теперь ограничимся членами степени не выше x^2 и рассмотрим квадратное неравенство относительно x: $y=x^2+x+1-e^x \geq 0$. Положительный корень уравнения $x^2+x+1-e^x=0$ равен $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{4e^x-3}}{2}$. При $x=0$, $y=0$, а при $x_1>0$ имеем $y>0$ (рис. 4.), что доказывает неравенство.

Приложение 3. Доказательство неравенства $e^x-1 \geq x,\ \ x \geq 0$.

Докажем неравенство для натуральных значений аргумента n. Запишем ряд очевидных неравенств

$$\begin{cases} 1=1, \\ e>1, \\ e^2>1, \quad \Rightarrow 1+e+e^2+e^{n-1} \geq n. \\ \ldots \\ e^{n-1}>1. \end{cases}$$

Складываем левые и правые части неравенств $1+e+e^2+e^{n-1} \geq n.$ Левая часть неравенства есть геометрическая прогрессия, сумма которой равна $\dfrac{1-e^n}{1-e}<e^n-1.$ В результате имеем неравенство $e^n-1 \geq n,\ \ n=0,1,2,\ldots$

Приложение 4. Доказательство неравенства $tgx \leq e^x-1,\ \ x>0.$

Преобразуем неравенство, приведя его к сравнению с геометрической прогрессией $\dfrac{1}{1-\sin^2 x}=1+\sin^2 x+\sin^4 x+\ldots$.

$$tg^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \leq \left(e^x-1\right)^2 \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \leq \left(e^x-1\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x+\sin^4 x+\ldots \leq \left(e^x-1\right)^2.$$

Нас интересуют малые x, поэтому в левой части неравенства ограничимся первым (ведущим) членом $\sin^2 x$. Используем неравенство $e^x-1 \geq x$, получим очевидное неравенство $\sin x \leq x$.

Замечание 4. Неравенство $tgx \leq e^x-1$ при возрастании x нарушается, поскольку при $x \to \pi/2$ имеем $tgx \to \infty$. По этой причине в доказательстве рассматриваются очень малые x, для которых неравенство еще выполняется.

Выводы

1. Разработан новый метод доказательства стандартных пределов и следствий из них. Пределы получены на основе универсальной системы неравенств. Такой подход в корне отличается от общепринятого подхода.
2. Стандартные пределы получены с использованием известных неравенств элементарной математики, что повышает ценность подхода.
3. Результаты работы подкреплены численными расчетами, что подтверждает теорию.
4. Подход обобщает второй стандартный предел (формулы (12)), причем новые формулы являются естественным продуктом нашей теории.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука,1970. – Т. I. - 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Изд. ФМЛ, 1956. – Т. 1. – 472 с.
3. Мироненко Л.П. Эквивалентность стандартных пределов в теории пределов / Л.П. Мироненко // Искусственный интеллект. – 2012. –.№ 3. – С. 123-128.
4. Мироненко Л.П. Стандартные пределы и метод неопределенных коэффициентов / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко // Искусственный интеллект. – № 3. – 2012. – С. 284-291.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М. : Наука, «ФМЛ», 1972. – Т. 1. – 795 с.
6. Гурса Э. Курс математического анализа / Гурса Э. – Москва : Государственное технико-творческое издательство, 1933. – Т. 1. – 368 с.

Literature

1. Kudriavtsew L.D. Matematichesky analiz. Том I., Nauka,1970 - 571 p.
2. Ilyin V.A., Pozdniak E.G. Oscnowy matematicheskogo analiza, том 1, Izd. FML, Moskwa, 1956. – 472 p.
3. Mironenko L.P. An Equavalance of the Standard Limits in the Theory of Limits// Artificial Inteligence, 2, 2012 – p. 123-128.
4. Mironenko L.P., Petrenko I.V. The standard limits and the method of undefined coefficients// Artificial Inteligence, 3, 2012– p. 284-291.
5. Fihtengolts G.M. Kurs differentsialnogo I integralnogo ischislenia, том 1, Nauka, «FML», 1972 - 795 p.
6. Gursa E. Kurs matematicheskogo analiza, том 1, Gosudarstvennoe techniko-tworcheskoe izdatelstvo – Moskwa, 1933 - 368 p

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko

An Obtaining of the First and Second Standard Limits Through a System of Inequalities

The purpose of the paper is an universal approach for obtaining the standard limits in the elementary theory of limits. The approach uses the inequalities

$$x \le tgx \le e^x - 1 \le xe^x . \quad (1)$$

The inequalities can be proved by methods of the elementary mathematics which are given in the appendixes of the paper.

After the division the inequalities by $x \ne 0$ and multiplying them by $\cos x$ the inequalities are prepared to the limit transition at $x \to 0$. The result is two standard limits

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (2)$$

The method is applied to both standard limits simultaneously, that makes the theory more universal. The inequalities can be generalized as

$$\alpha x \le tg\alpha x \le \alpha x e^{\alpha x},$$

$$\alpha x \le e^{\alpha x} - 1 \le \alpha x e^{\alpha x}, \quad \alpha > 0, x > 0.$$

In the case $\alpha = \ln a$ the second inequalities are $\ln a \cdot x \le a^x - 1 \le x \ln a \cdot a^x$. The generalized form of the theory gives the opportunity to get some new representations of the standard limits. Namely,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1 + \ln a \cdot x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}(1 + \ln a \cdot x)^{1/x} = a, \quad \lim_{x\to\infty}(1 + \ln a / x)^x = a .$$

Our theory has some advantages in comparison with the traditional way of the consideration. First of all the theory is very simple and therefore it is very attractive. On the other hand the theory gives an opportunity to get some simple generalizations, which makes the method more universal.

Статья поступила в редакцию 07.11.2012.